

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ ЭКОЛОГИИ И ПРИРОДОПОЛЬЗОВАНИЯ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
Кафедра моделирования экологических систем

Ш.Х. ЗАРИПОВ, Р.Ф. МАРДАНОВ, В.Ф. ШАРАФУТДИНОВ,
А.К. ГИЛЬФАНОВ, Т.В. НИКОНЕНКОВА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА
ЗАГРЯЗНЕНИЙ В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ

Учебное пособие

Казань – 2018

*Рекомендовано учебно-методической комиссией
Института экологии и природопользования
Протокол № 2 от 15 марта 2018 года*

Рецензенты:

доктор физико-математических наук,
профессор кафедры моделирования экологических систем КФУ
Э.В. Скворцов

**Зарипов Ш.Х., Марданов Р.Ф., Гильфанов А.К., Шарафутдинов В.Ф.,
Никоненкова Т.В.**

Математические модели переноса загрязнений в окружающей среде /
Ш.Х. Зарипов, Р.Ф. Марданов, А.К. Гильфанов, В.Ф. Шарафутдинов,
Т.В. Никоненкова – Казань: Казан. ун-т, 2018. – 47с.

Учебное пособие содержит аналитические решения задач переноса загрязнений в окружающей среде и программы реализации этих решений в пакете Mathematica. Пособие рекомендовано для бакалавров и магистров по направлениям “Экология и природопользование”, “Механика и математическое моделирование”.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЕНИЙ В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ И ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНО–ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА...	5
1.1. Перенос вещества в результате диффузии. Законы Фика	5
1.2. Вывод уравнения диффузии в неподвижной среде	6
1.3. Вывод уравнения конвективной диффузии в подвижной среде	8
1.4. Граничные условия для уравнения переноса	10
2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЕНИЙ.....	11
2.1. Решение одномерного уравнения диффузии в неподвижной неограниченной среде	11
2.2. Решение двумерного и трехмерного уравнения диффузии в неподвижной неограниченной среде	15
2.3. Решение одномерного уравнения конвективной диффузии в подвижной среде	20
2.4. Решение одномерного уравнения диффузии в неподвижной среде с различными граничными условиями.....	23
3. ГАУССОВА МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АТМОСФЕРНЫХ ЗАГРЯЗНЕНИЙ	33
3.1. Гауссова модель распространения загрязнений от точечного источника	33
3.2. Гауссова модель для n источников	38
4. МОДЕЛЬ ЗАГРЯЗНЕНИЯ РЕКИ.....	40
Список литературы	44
Приложения.....	45
А1. Дельта функция Дирака.....	45
А2. Нормальное распределение (Гауссова функция).	46

ВВЕДЕНИЕ

Одной из современных проблем области охраны окружающей среды остается интенсивное загрязнение атмосферы, водных объектов и почвы различными антропогенными источниками выбросов. Прогнозирование качества окружающей среды и оценка возможного влияния на него выбросов от промышленных предприятий, автомобильного транспорта и других видов человеческой деятельности основывается, как правило, на математическом моделировании процессов переноса загрязнений в воздушной и водной среде. В настоящее время существует широкий спектр математических моделей, описывающих процессы переноса веществ в атмосфере, водоемах и подземных водах. Созданы многочисленные компьютерные программы, реализующие эти модели (PM5, Эколог и т.п.).

Для ряда простых случаев математические задачи переноса допускают аналитические решения, анализ которых дает ясное представление о вкладе различных механизмов переноса загрязнений в пространственное распределение концентрации загрязнений. Целью настоящего учебного пособия является знакомство с некоторыми моделями переноса для мгновенного точечного источника в неподвижной и подвижной среде. Приведены тексты программ на языке *Mathima*[2,7,8], реализующие аналитические решения. Изучение приведенных моделей и их аналитических решений повысит понимание более сложных моделей, описывающих движение загрязнений в реальных природных средах. Пособие в значительной степени базируется на открытом курсе лекций [1].

1. ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЕНИЙ В ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЕ И ВЫВОД УРАВНЕНИЯ КОНВЕКТИВНО–ДИФФУЗИОННОГО ПЕРЕНОСА

1.1. Перенос вещества в результате диффузии. Законы Фика

Распространение загрязняющих веществ в воздушной и водной среде связано с различными физическими процессами переноса. Одним из механизмов переноса вещества в воздушной или водной среде является диффузия. Диффузия – процесс выравнивания концентрации веществ в различных областях термодинамически однородной среды. Различают молекулярную и турбулентную диффузию. Под молекулярной диффузией понимают хаотическое движение молекул газа. Турбулентная диффузия обязана сложным вихревым потокам в жидкости или газе.

В 1855 году немецким физиком Фиком сформулированы первый и второй законы Фика, определяющие связь между потоком вещества и его концентрацией в пространстве. Введем понятие потока q вещества через сечение единичной площади за единицу времени

$$q = \frac{\Delta m}{\Delta S \Delta t} \quad (1.1)$$

где Δm – масса вещества через площадь ΔS за время Δt .



Адольф Ойген Фик (нем.*Adolf Eugen Fick*; 1829 —1901)— немецкий физик-физиолог.

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Фик,
_Адольф_Ойген](https://ru.wikipedia.org/wiki/Фик,_Адольф_Ойген)

Согласно **первому закону Фика** поток q вещества пропорционален градиенту концентрации C вещества и направлен противоположно направлению градиента

$$q = -D \text{grad} C = -D \nabla C \quad (1.2)$$

где D – коэффициент диффузии, C – концентрация. Для введенных величин в системе единиц СИ приняты размерности $[C] = \text{кг/м}^3$, $[D] = \text{м}^2/\text{с}$, $[x] = \text{м}$, $[q] = \text{кг/м}^2\text{с}$. Выражение (1.2) соответствует изотропной среде, в которой коэффициент диффузии одинаков во всех направлениях.

В одномерном случае (1.2) запишется в виде

$$q = -D \frac{\partial C}{\partial x} = -D \frac{dC}{dx}$$

Для задач о переносе загрязнений в природных средах величины молекулярной диффузии много меньше турбулентного переноса. Поэтому обычно под коэффициентом диффузии в задачах переноса загрязнений в окружающей среде, в первую очередь, понимают коэффициент турбулентной диффузии.

1.2. Вывод уравнения диффузии в неподвижной среде

Рассмотрим баланс вещества в элементарном цилиндрическом объеме длины Δx и площади S поперечного сечения, заполненном средой (жидкостью или газом) (рис.1.1).

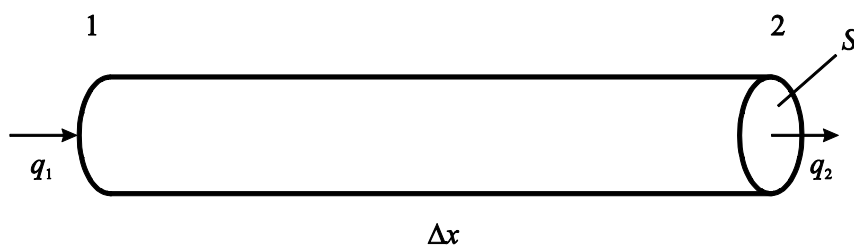


Рис.1.1

Полагая среду неподвижной, введем потоки вещества q_1^d и q_2^d через сечения 1 и 2 в результате диффузии:

$$q_1^d = -D \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_1, \quad q_2^d = -D \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_2 \quad (1.2)$$

Тогда изменение массы Δm в рассматриваемом объеме за время Δt может быть записано в виде

$$\Delta m_d = (q_1^d - q_2^d) S \Delta t = D \left(\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_2 - \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_1 \right) S \Delta t \quad (1.3)$$

Из (1.3) для изменения концентрации ΔC в рассматриваемом объеме получим

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{\Delta m_d}{S \Delta x \Delta t} = D \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_2 - \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_1 \right)}{\Delta x} \quad (1.4)$$

Переходя в (1.4) к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение диффузии вещества в неподвижной среде

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1.5)$$

Уравнение (1.5) выражает собой второй закон Фика. Производная от концентрации по времени пропорциональна второй производной по координате. В двумерном (2D) и трехмерном (3D) случаях уравнение (1.5) для изотропного коэффициента диффузии примет вид

$$2D: \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \Delta C = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (1.6)$$

$$3D: \quad \frac{\partial C}{\partial t} = D \Delta C = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (1.7)$$

В случае различных коэффициентов горизонтальной D_h и вертикальной D_v диффузии уравнение (1.7) может быть записано как

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_h \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) + D_v \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \quad (1.8)$$

1.3. Вывод уравнения конвективной диффузии в подвижной среде

Пусть в рассматриваемой цилиндрической трубке длины Δx и площади S поперечного сечения среда (жидкость или газ) движется с постоянной скоростью U (рис. 1.2).

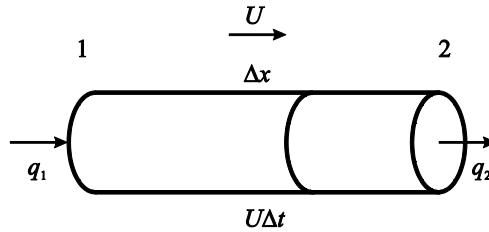


Рис. 1.2. Конвективно–диффузионный перенос загрязнений

В этом случае массы жидкости или газа, протекающей через сечение 1 и сечение 2, могут быть выражены в виде

$$m_1 = C_1 V = C_1 S U \Delta t, m_2 = C_2 V = C_2 S U \Delta t$$

где $V = S U \Delta t$ – объем жидкости или газа поступающих за время Δt , C_1 и C_2 – концентрации загрязнений в сечениях 1 и 2. Тогда изменение массы вещества за счет течения среды выразится как

$$\Delta m_u = m_1 - m_2 = (C_1 - C_2) S U \Delta t \quad (1.9)$$

Согласно (1.3) изменение массы загрязнений за счет диффузии может быть записано так:

$$\Delta m_d = (q_1^d - q_2^d) S \Delta t = D \left(\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_2 - \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_1 \right) S \Delta t \quad (1.10)$$

Таким образом, изменение концентрации ΔC в рассматриваемом объеме в результате переноса за счет диффузии и течения среды выразится в виде

$$\frac{\Delta C}{\Delta t} = \frac{\Delta m_u + \Delta m_d}{S \Delta x \Delta t} D \frac{\left(\frac{\partial C}{\partial x} \Big|_2 - \frac{\partial C}{\partial x} \Big|_1 \right)}{\Delta x} + U \frac{(C_1 - C_2)}{\Delta x} \quad (1.11)$$

Переходя к пределу в (1.11) при $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение конвективной диффузии вещества в подвижной среде

$$\frac{\partial C}{\partial x} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1.12)$$

Одномерное уравнение конвективной диффузии (1.12) может быть обобщено на случай двумерной и трехмерной задач

$$2D: \frac{\partial C}{\partial t} + U_x \frac{\partial C}{\partial x} + U_y \frac{\partial C}{\partial y} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \quad (1.13)$$

$$3D: \frac{\partial C}{\partial t} + U_x \frac{\partial C}{\partial x} + U_y \frac{\partial C}{\partial y} + U_z \frac{\partial C}{\partial z} = D \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right) \quad (1.14)$$

где U_x, U_y, U_z – декартовы компоненты скорости течения среды.

Уравнения (1.13) и (1.14) в операторном виде запишутся так:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{U} \cdot \nabla C = D \Delta C \quad (1.15)$$

При анализе уравнения конвективной диффузии удобно рассмотреть его в безразмерном виде. Запишем уравнение (1.12) для стационарного случая $\partial C / \partial t = 0$

$$U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (1.16)$$

Введем характерные величины скорости U_0 и длины L . Тогда уравнение (1.16) перепишем в безразмерном виде

$$Pe \frac{\partial C}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial^2 C}{\partial \tilde{x}^2} \quad (1.17)$$

где $Pe = UL / D$, $\tilde{x} = x / L$. Безразмерная величина Pe называется числом Пекле и является критерием преобладания конвективного или диффузионного переноса. При $Pe \ll 1$ перенос загрязнений определяется в первую очередь диффузией, в то время как при $Pe \gg 1$ конвективный перенос вызывает движение загрязнений.

1.4. Граничные условия для уравнения переноса

Приведенные выше уравнения диффузионного и конвективно–диффузионного переноса загрязнений представляют собой уравнения в частных производных, решение которых предполагает задание для искомой функции – концентрации C начальных условий и условий на границах области распространения загрязнений. Для переноса загрязнений в природных средах границами будут поверхность земли, дно реки или озера, различные препятствия (граница лесного массива, стена помещения). При распространении от источника пятно загрязнения может добраться до границы, где его поведение зависит от принятых на ней условий. На границе области может быть задано значение или распределение концентрации

$$C_{bound} = const, \quad C_{bound} = f(\bar{r}) \quad (1.18)$$

В случае поглощения вещества загрязнения на границе задается нулевое значение концентрации

$$C_{bounds} = 0 \quad (1.19)$$

В качестве граничных условий может быть задан нормальный поток вещества на единицу площади границы $(q/A)_n$

$$\left. \frac{q}{A} \right|_n = \left[CU_n - \frac{\partial C}{\partial n} \right]_{bound} \quad (1.20)$$

где индекс n указывает на направление наружной нормали, U_n – нормальная скорость течения на границе. В случае нулевого потока $(q/A)_n = 0$ запишем:

$$\left[CU_n - \frac{\partial C}{\partial n} \right]_{bound} = 0 \quad (1.21)$$

Если на границе нормальная скорость течения равна нулю, условие (1.21) примет вид

$$\left. \frac{\partial C}{\partial n} \right|_n = 0 \quad (1.22)$$

Наряду с граничными условиями краевая задача для уравнения переноса загрязнений включает в себя начальные условия. Например, для одномерного

уравнения диффузии (1.5) в задаче о мгновенном выбросе загрязнения массой m начальное условие в точке выброса можно записать в виде

$$C(x) = m\delta(x) \quad (1.23)$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция (приложение А1).

Для плоской и пространственной задач о точечном выбросе начальное условие примет вид

$$C(x, y) = m\delta(x)\delta(y) \quad (1.24)$$

$$C(x, y, z) = m\delta(x)\delta(y)\delta(z) \quad (1.25)$$

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРЕНОСА ЗАГРЯЗНЕНИЙ

Приведенные в разделе 1 уравнения переноса с граничными и начальными условиями могут быть решены в аналитическом или численном виде. Возможность аналитического решения определяется типом уравнения и видом граничных условий. В частности, аналитические решения могут быть получены, в основном, для постоянных коэффициентов диффузии и скорости течения среды. Остановимся далее на простейших аналитических решениях краевых задач для некоторых уравнений переноса загрязнений.

2.1. Решение одномерного уравнения диффузии в неподвижной неограниченной среде

Рассмотрим в одномерном приближении задачу о выбросе массы m в канале сечения S в точке $x=0$. Распределение концентрации вещества описывается одномерным уравнением диффузии

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.1)$$

с начальными и граничными условиями вида

$$C(x, 0) = m\delta(x) \quad (2.2)$$

$$C(x, t) = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Распределение концентрации $C(x,t)$, определяемое уравнением (2.1) и условиями (2.2), (2.3), будет меняться по координате x и времени t . В окрестности точки выброса концентрация будет уменьшаться, а за ее пределами – увеличиваться. Из второго закона Фика (2.1) следует также, что функция $C(x,t)$ должна быть выпуклой в некоторой окрестности точки $x=0$ и вогнутой – за ее пределами, то есть функция должна иметь вид гауссовой функции. Учитывая симметрию функции $C(x,t)$ относительно точки $x=0$ будем искать решение уравнения (2.1) в виде функции Гаусса (приложение A2)

$$C(x,t) = \frac{A}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (2.4)$$

где $\sigma(t)$ – дисперсия распределения $C(x,t)$, A – неопределенная константа.

Подставляя выражение (2.4) в уравнение (2.1) получим:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \left[-\frac{\sigma'}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} + \left(\frac{1}{\sigma} + \frac{x^2 \sigma'}{\sigma^3} \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right] = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sigma'}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (2.5)$$

Для преобразования правой части уравнения (2.1), определим сначала первую производную от концентрации по координате:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \left(-\frac{x}{\sigma^2} \right) e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = -\frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (2.6)$$

Дифференцируя выражение (2.6) по x повторно, получим:

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = -\frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} x \left(e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - \frac{x^2}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma^3} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \left(\frac{x^2}{\sigma^2} - 1 \right) \quad (2.7)$$

Подставляя полученные производные (2.5), (2.7) в уравнение (2.1), получим дифференциальное уравнение для дисперсии $\sigma(t)$

$$\frac{d\sigma^2}{dt} = 2D \quad (2.8)$$

решением которого в предположении нулевой начальной дисперсии концентрации (считаем, что в начальный момент времени $t=0$ вся масса

загрязняющего вещества сосредоточена в точке выброса) является линейная зависимость пространственной дисперсии от времени:

$$\sigma(t)^2 = 2Dt \quad (2.9)$$

С учетом (2.9) решение (2.4) перепишется в виде

$$C(x, t) = \frac{A}{2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (2.10)$$

Учитывая, что для нормированной гауссовой функции $f(x)$ имеет место равенство $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, выразим общую массу выброса в форме

$$m = S \cdot \int_{-\infty}^{\infty} C(x, t)dx = S \cdot A \quad (2.11)$$

С учетом (2.11) решение (2.10) окончательно примет вид

$$C(x, t) = \frac{m}{S2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \quad (2.12)$$

Как видно из (2.12) максимальная концентрация C_{\max} загрязняющего вещества всегда наблюдается в точке выброса $x=0$ и убывает со временем по закону $C_{\max} \sim 1/\sqrt{t}$. Гауссова функция (2.4) является выпуклой при $|x| < \sigma$ и вогнутой при $|x| > \sigma$ (рис. 2.1). Следовательно, концентрация загрязняющего вещества в некоторый момент времени t будет убывать в окрестности точки выброса $|x| < \sigma$ или на пространственном интервале $|x| < \sqrt{2Dt}$, а при $|x| > \sqrt{2Dt}$, концентрация будет возрастать. Так как более 99% площади под кривой гауссова распределения приходится на интервал $|x| < 3\sigma$, почти вся масса загрязняющего вещества будет находиться в пределах области $|x| < 3\sqrt{2Dt}$ [4]. Таким образом, величины -3σ , 3σ ($3\sigma = 3\sqrt{2Dt}$) можно принять за границы области распространения загрязнения. Видно, что размер области загрязнения будет расти со временем по закону \sqrt{t} .

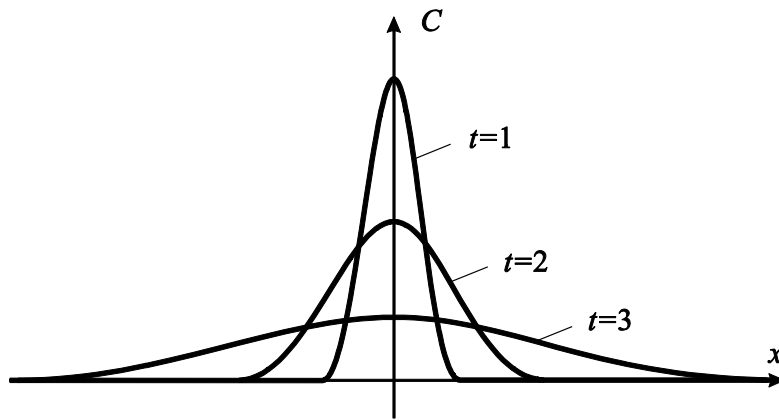


Рис. 2.1. Вид кривой гауссова распределения (2.12)

Полученное решение (2.12) одномерного уравнения диффузии для точечного источника с массой выброса $m=1$ в неподвижной среде реализовано в программе P2.1 на языке Maxima. Распределения $c(x,t)$ в различные моменты времени для $D=1$ и для различных коэффициентов диффузии при $t=1$, рассчитанные по формуле (2.12), приведены на рис. 2.2 и рис. 2.3.

ListingP2.1: Программа визуализации решения одномерного уравнения диффузии для точечного источника в неподвижной среде (2.12)

```
c(x,t,dif):=1/sqrt(2*%pi*dif*t)*exp(-x^2/(4*dif*t));
dif:1$
wxplot2d([c(x,0.1,1),c(x,0.2,1),c(x,0.5,1),c(x,1,1)], [x,-4,4],
  [legend,"t=0.1","t=0.2","t=0.5","t=1"],[style,[lines,4,5],[lines,3,5],
  [lines,2,5],[lines,1,5]], [ylabel,"c(x,t)"], [xlabel,"x"]);
wxplot2d([c(x,0.5,0.1),c(x,0.5,0.2),c(x,0.5,0.5),c(x,0.5,1)], [x,-4,4],
  [legend,"D=0.1","D=0.2","D=0.5","D=1"],[style,[lines,4,5],[lines,3,5],
  [lines,2,5],[lines,1,5]], [ylabel,"c(x,dif)"], [xlabel,"x"]);
```

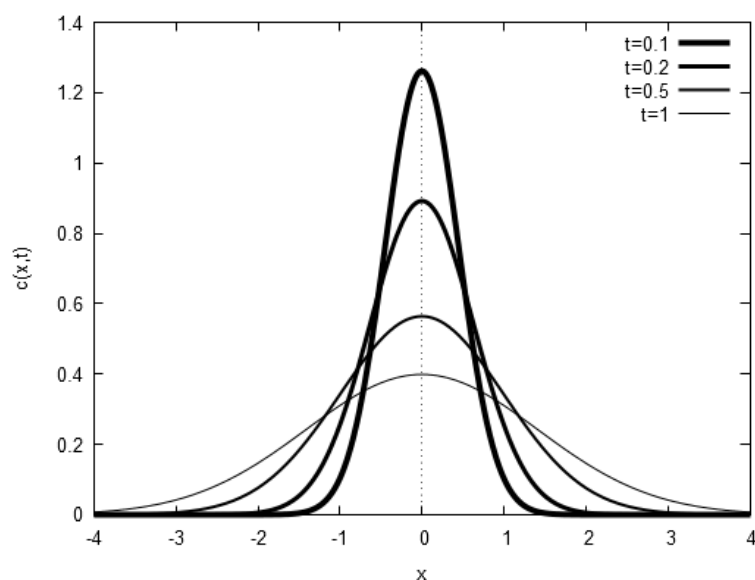


Рис. 2.2. Распределение $c(x,t)$ для $D=1$ в различные моменты времени

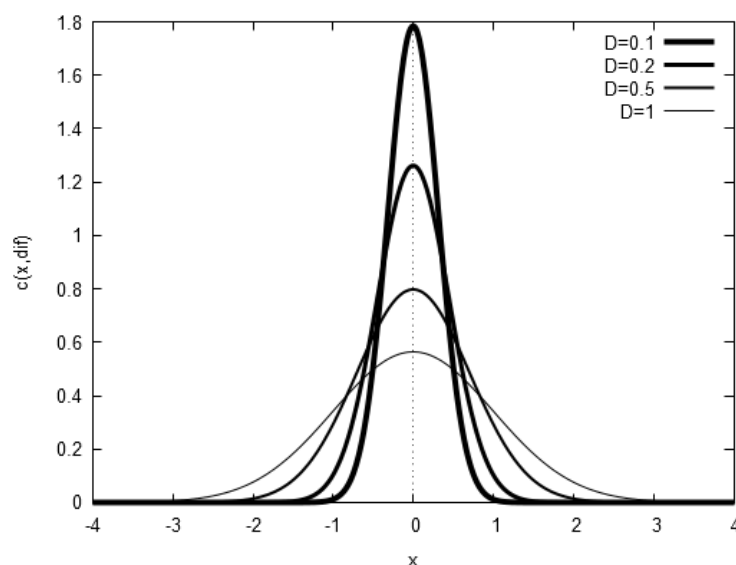


Рис. 2.3. Распределение $c(x,t)$ для различных D при $t=1$

2.2. Решение двумерного и трехмерного уравнения диффузии в неподвижной неограниченной среде.

Рассмотрим распространение выброса загрязняющего вещества от мгновенного точечного источника в неподвижной среде ($U_x=U_y=0$) в двухмерном измерении. Пусть мгновенный выброс массы m происходит при $x=y=0$ в щели между двумя плоскостями высотой L_z . Масса выброса первоначально распределена равномерно по z так, что начальная концентрация может быть записана в виде

$$C(x, y, t = 0) = m\delta(x)\delta(y) \quad (2.13)$$

Вдали от источника концентрация убывает до нуля, т.е. приняты условия

$$C(x, y, t) = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty, y \rightarrow \infty$$

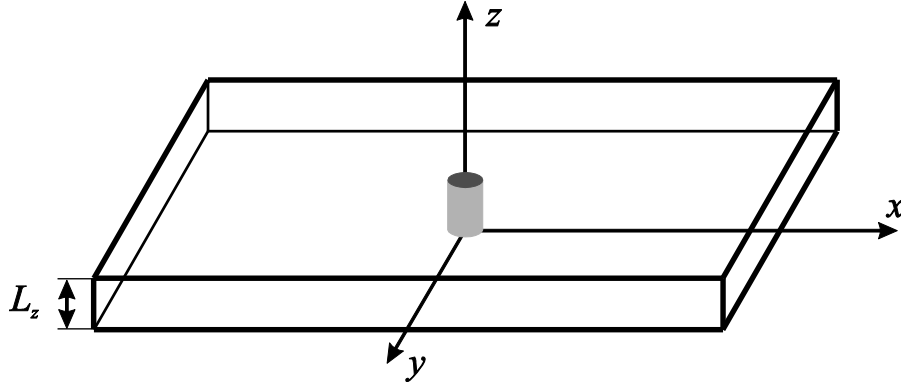


Рис. 2.4

Для общности будем считать диффузию анизотропной, т.е. $D_x \neq D_y$.

Уравнение диффузионного переноса может быть записано в виде:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}. \quad (2.14)$$

Согласно закону Фика и уравнению (2.14) диффузия в направлениях x и y зависит только от соответствующих распределений по x и y . Поэтому решение (2.14) может быть представлено как произведение двух несвязанных решений, описывающих распределение по одной из координат x или y :

$$C(x, y, t) = C_1(x, t)C_2(y, t) \quad (2.15)$$

где C_1 не является функцией y и C_2 не является функцией x . Подставим (2.15) в (2.14):

$$\frac{\partial}{\partial t}(C_1 C_2) = C_1 \frac{\partial C_2}{\partial t} + C_2 \frac{\partial C_1}{\partial t} = D_x C_2 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + D_y C_1 \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \quad (2.16)$$

Перепишем (2.16) в виде:

$$C_2 \left[\frac{\partial C_1}{\partial t} - D_x \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \right] + C_1 \left[\frac{\partial C_2}{\partial t} - D_y \frac{\partial^2 C_2}{\partial y^2} \right] = 0. \quad (2.17)$$

Отличное от тривиального ($C_1=C_2=0$) решение (2.17) может быть получено, если приравнять к нулю выражения в скобках. В этом случае получим для $C_1(x,t)$

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} = D_x \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} \quad (2.18)$$

Согласно (2.10) решение (2.18) запишем в виде:

$$C_1(x,t) = \frac{A_1}{2\sqrt{\pi D_x t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t}\right) \quad (2.19)$$

Аналогичное выражение для C_2 , получается из равенства нулю второй скобки (2.17). Общее решение (2.15) запишется так:

$$C(x, y, t) = C_1(x, t)C_2(y, t) = \frac{A_1 A_2}{4\pi t \sqrt{D_x D_y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t}\right), \quad (2.20)$$

где A_1 и A_2 константы. Из условия

$$m = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{x=-\infty}^{\infty} C(x, y, t) dx dy \quad (2.21)$$

получим, что $A_1 A_2 = m$.

Решение (2.20) перепишем в виде:

$$C(x, y, t) = \frac{m}{L_z 4\pi t \sqrt{D_x D_y}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t}\right) \quad (2.22)$$

Решение (2.22) двумерного уравнения диффузии для точечного источника с массой выброса $m=1$ в неподвижной среде реализовано в программе **P2.2** на языке **Math**. На рис.2.5 и 2.6 приведены распределения $c(x,0,t)$ и $c(0,y,t)$ в различные моменты времени для $D_x=1$ и $D_y=0.2$ ($L_z=2$), рассчитанные по формуле (2.22). Изолинии распределения $c(x,y,t)$ при $t=5$ даны на рис. 2.7. Видно, что пятно загрязнения диффундирует в направлении x дальше, чем в направлении y .

ListingP2.2: Программа визуализации решения (2.22) двумерного уравнения диффузии в неподвижной среде

```
difx:1$
dify:0.2$
lz:2$
c(x,y,t):=1/(4*%pi*lz*t*sqrt(difx*dify))*exp(-x^2/(4*difx*t))*
exp(-y^2/(4*dify*t));
wxplot2d([c(x,0,0.1),c(x,0,0.2),c(x,0,0.5),c(x,0,1)],[x,-4,4],[legend,
"t=0.1","t=0.2","t=0.5","t=1"],[style,[lines,4,5],[lines,3,5],
[lines,2,5],[lines,1,5]],[ylabel,"c(x)],[xlabel,"x"]);
wxplot2d([c(0,y,0.1),c(0,y,0.2),c(0,y,0.5),c(0,y,1)],[y,-4,4],[legend,
"t=0.1","t=0.2","t=0.5","t=1"],[style,[lines,4,5],[lines,3,5],
[lines,2,5],[lines,1,5]],[ylabel,"c(y)],[xlabel,"y"]);
wxcontour_plot(c(x,y,5),[x,-6,6],[y,-6,6],[grid, 100, 100],
[legend,true],[gnuplot_preamble, "set cntrparam levels 10"]);
```

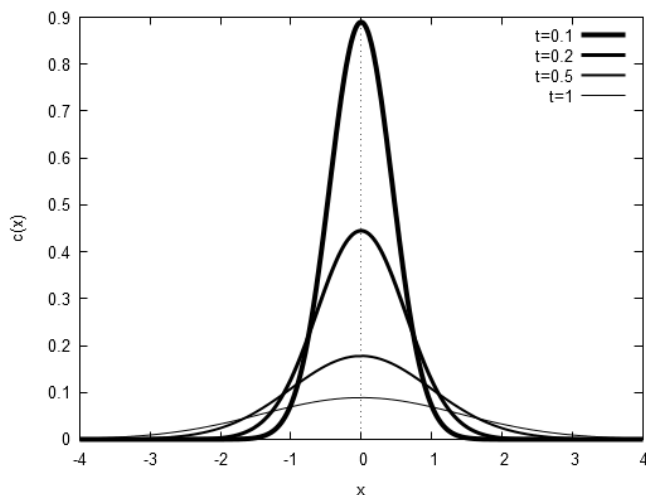


Рис. 2.5. Распределения $c(x, 0, t)$ в различные моменты времени

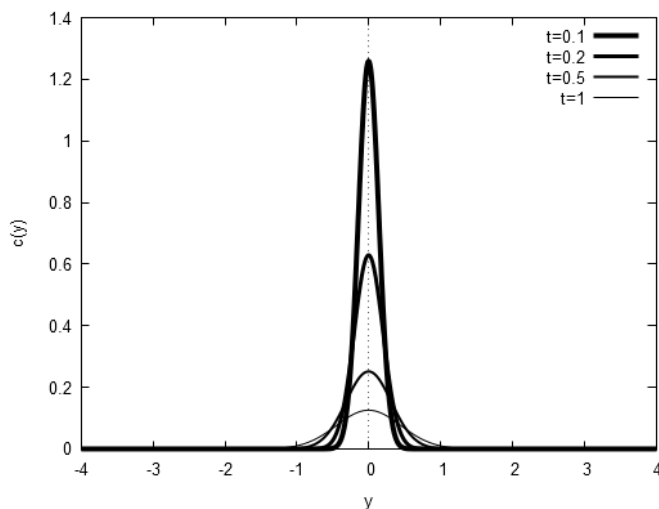


Рис. 2.6. Распределения $c(0, y, t)$ в различные моменты времени

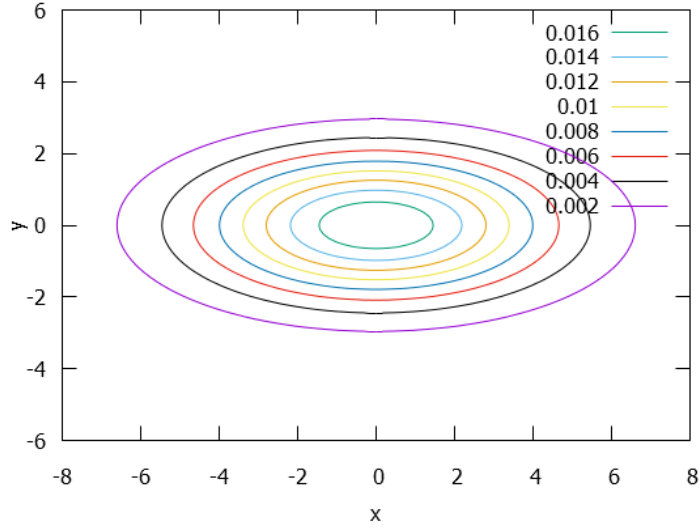


Рис. 2.7. Изолинии распределения $c(x,y,t)$ при $t=5$

Аналогично решению (2.22) можно записать решение задачи о мгновенном точечном источнике в трехмерном пространстве (задача (1.7), (1.25))

$$C(x, y, z, t) = \frac{m}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t} - \frac{z^2}{4D_z t}\right) \quad (2.23)$$

Для представленных решений уравнения диффузии для мгновенного точечного источника в одномерном, двумерном и трехмерном случаях максимум концентрации сохраняется в точке выброса. Соответствующие значения C_{max} могут быть вычислены по формулам

$$1D: C_{max} = \frac{m}{S\sqrt{4\pi Dt}} \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (2.24)$$

$$2D: C_{max} = \frac{m}{L_z 4\pi t \sqrt{D_x D_y}} \sim \frac{1}{t} \quad (2.25)$$

$$3D: C_{max} = \frac{m}{(4\pi t)^{3/2} \sqrt{D_x D_y D_z}} \sim \frac{1}{t^{3/2}} \quad (2.26)$$

Отметим, что при $t=0$ непосредственно в точке выброса формулы (2.24), (2.25), (2.26) дают бесконечное значение C_{max} . В одномерном, двумерном и трехмерном случаях величина C_{max} будет пропорциональна $1/\sqrt{t}$, $1/t$, $1/t^{3/2}$ соответственно, т.е. значение максимальной концентрации будет убывать

быстрее в трехмерном случае, когда диффузия загрязнения идет по всем направлениям (рис. 2.8).

ListingP2.3: Программа визуализации зависимости максимальной концентрации от времени для решения уравнения диффузии от мгновенного точечного источника в одномерном, двумерном и трехмерном случаях

```

cmax1d:1/sqrt(t);
cmax2d:1/t;
cmax3d:1/t^1.5;
wxplot2d([cmax1d,cmax2d,cmax3d],[t,1,5],[y,0,1],[legend,"1D","2D","3D"],
[style,[lines,1,5],[lines,2,5],[lines,3,5]],[ylabel,"Cmax"],[xlabel,"Time"]);

```

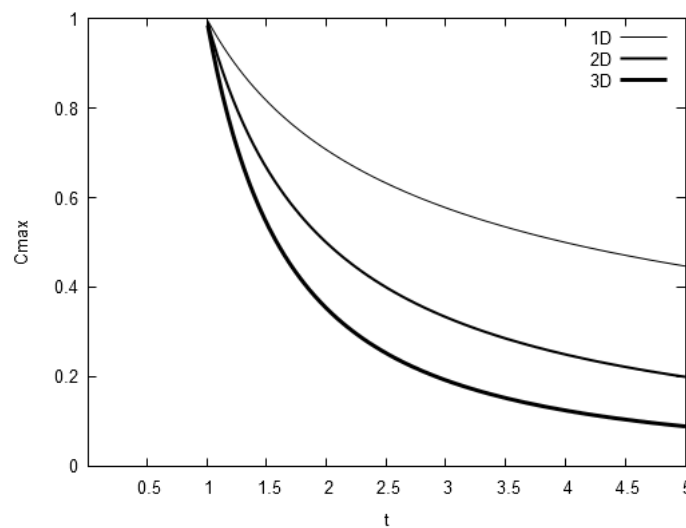


Рис. 2.8. Зависимость $C_{max}(t)$

2.3. Решение одномерного уравнения конвективной диффузии в подвижной среде

Рассмотрим решение одномерной задачи о мгновенном источнике в подвижной среде с постоянной скоростью U

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (2.27)$$

с начальными и граничными условиями вида

$$C(x, 0) = m\delta(x) \quad (2.28)$$

$$C(x, t) = 0 \text{ при } x \rightarrow \infty \quad (2.29)$$

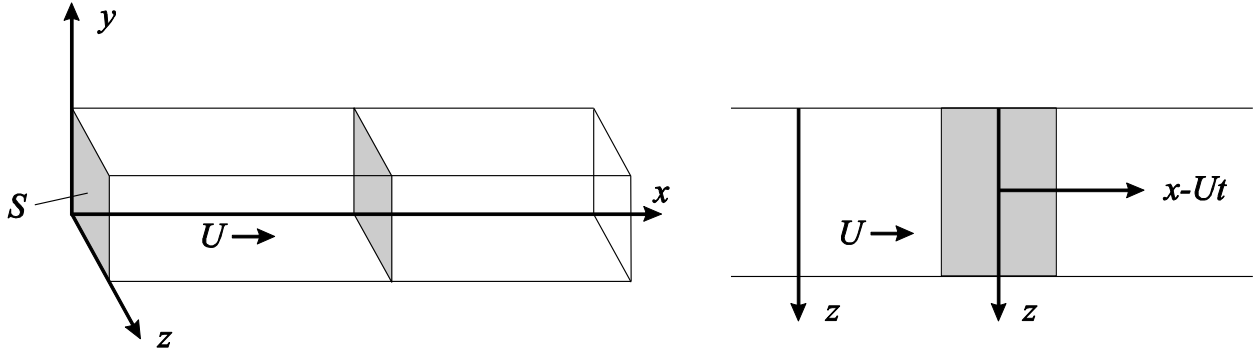


Рис. 2.9. Схема распространения

Перейдем в задаче (2.27)–(2.29) от переменных (x, t) к новым переменным (θ, t) , в которых $\theta = x - Ut$. Учитывая, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -U, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 1$$

для частных производных в (2.27) можем записать

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t} = -U \frac{\partial C}{\partial \theta} + \frac{\partial C}{\partial t} \\ \frac{\partial C(\theta, t)}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial C}{\partial \theta} \\ \frac{\partial^2 C(\theta, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Подставляя (2.30) в уравнение (2.27) и условия (2.28), (2.29), получим

$$\frac{\partial C}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C}{\partial \theta^2} \quad (2.31)$$

$$C(\theta, 0) = m\delta(\theta) \quad (2.32)$$

$$C(\theta, t) = 0 \text{ при } \theta \rightarrow \infty \quad (2.33)$$

Согласно (2.12) решение краевой задачи (2.31), (2.32), (2.33) представится как

$$C(\theta, t) = \frac{m}{S2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{\theta^2}{4Dt}} \quad (2.34)$$

Подставляя $\theta = x - Ut$ в (2.34), получим

$$C(x,t) = \frac{m}{S2\sqrt{\pi Dt}} e^{-\frac{(x-Ut)^2}{4Dt}} \quad (2.35)$$

Решение (2.35) одномерного уравнения конвективной диффузии для точечного источника с массой выброса $m=1$ в подвижной среде реализовано в программе P2.4 на языке Maxima. Распределения $c(x,t)$ в различные моменты времени для $D=1$ и $U=1$, для различных значений D при $U=1$ и $t=0.5$ и для различных U при $D=1$ и $t=0.5$, рассчитанные по формуле (2.35), показаны на рис.2.8, рис.2.9, рис.2.10.

ListingP2.4: Программа визуализации решения одномерного уравнения диффузии в подвижной среде (2.35)

```
c(x,t,dif,u):=1/sqrt(2*%pi*dif*t)*exp(-(x-u*t)^2/(4*dif*t));
dif:1$
u:1$
wxplot2d([c(x,0.1,dif,u),c(x,0.5,dif,u),c(x,1,dif,u),c(x,2,dif,u)],
[x,-4,8],[legend,"t=0.1","t=0.5","t=0.5","t=1"],[style,[lines,4,5],
[lines,3,5],[lines,2,5],[lines,1,5]], [ylabel,"c(x)],[xlabel,"x"]);
wxplot2d([c(x,0.5,0.1,u),c(x,0.5,0.2,u),c(x,0.5,0.5,u),c(x,0.5,1,u)], [x,-4,4],
[legend,"dif=0.1","dif=0.2","dif=0.5","dif=1"],
[style,[lines,4,5],[lines,3,5],[lines,2,5],[lines,1,5]], [ylabel,"c(x)",
[xlabel,"x"]);
wxplot2d([c(x,0.5,dif,0.1),c(x,0.5,dif,1),c(x,0.5,dif,3),c(x,0.5,dif,6)],
[x,-4,8],[legend,"u=0.1","u=1","u=3","u=6"],[style,[lines,4,5],[lines,3,5],
[lines,2,5],[lines,1,5]], [ylabel,"c(x)],[xlabel,"x"]);
```

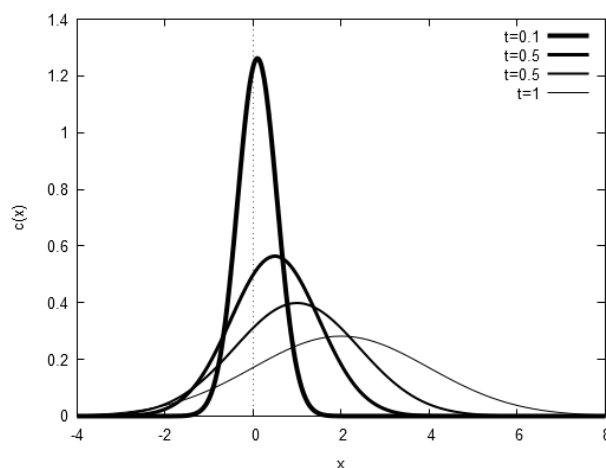


Рис. 2.8. Распределение $c(x,t)$ в различные моменты времени

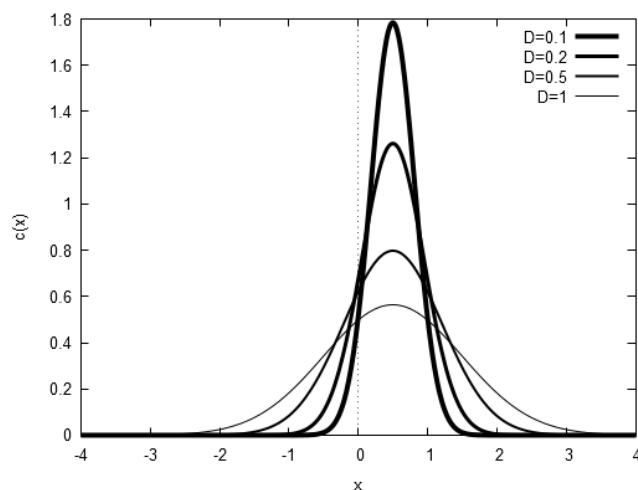


Рис. 2.9. Распределение $c(x,t)$ для различных D при $U=1$ и $t=1$

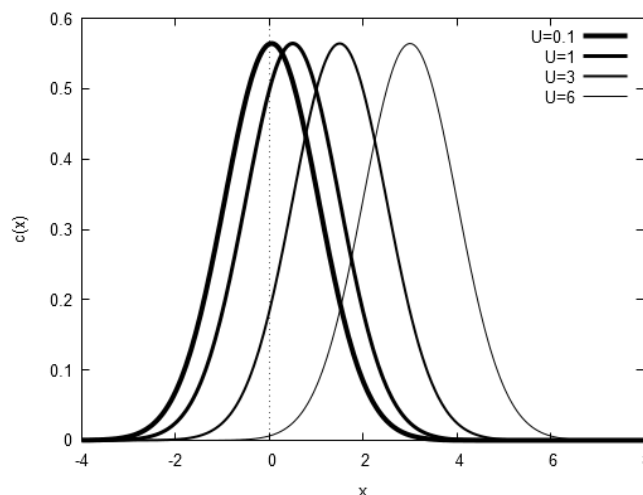


Рис. 2.10. Распределения $c(x,t)$ для различных скоростей U при $D=1$ и $t=0.5$

2.4. Решение одномерного уравнения диффузии в неподвижной среде с различными граничными условиями

Рассмотрим одномерную задачу распространения загрязнения в неподвижной среде в канале с площадью сечения S . В точке $x=0$ произошел залповый выброс массы m загрязняющего вещества. Распространение загрязнения описывается одномерным уравнением диффузии в неподвижной среде (2.1) с условиями (2.2) и (2.3) для канала бесконечной протяженности. Распределение концентрации вещества вдоль канала $C(x,t)$ в некоторый момент времени t определяется решением (2.12).

Рассмотрим решение уравнения диффузии в неподвижной среде (2.1) при различных условиях на границе, находящейся на конечном расстоянии от точки выброса. Пусть для одномерной задачи (2.1) имеем условие мгновенного выброса массой m в точке $x = 0$ при $t = 0$ и условие нулевого потока загрязнения при $x = -L$. Тогда уравнение (2.1) дополняется начальным условием (2.2) и граничным условием (нулевой граничный поток)

$$\partial C / \partial x = 0 \quad \text{при } x = -L \quad (2.36)$$

Решение (2.11), как показано сплошной черной линией на рис.2.12. ниже, не удовлетворяет условию нулевого потока при $x = -L$. В частности, $\partial C / \partial x > 0$ при $x = -L$. Это означает, что масса вещества $\int_{-\infty}^{-L} C(x) dx$ переходит через границу $x = -L$. Такую же массу, но в обратном направлении, можно получить, расположив новый источник в точке $x = -2L$, который находится в зеркальном отражении к оригиналу относительно границы $x = -L$. Назовем этот дополнительный источник образом исходного источника. Распределение концентрации для образа источника $C_{image}(x, t)$ показано на рис.2.12 пунктирной линией. Его форма идентична распределению $C(x, t)$ от оригинального источника, но его пик смещается от $x = 0$ до $x = -2L$. Таким образом, соответствующее распределение согласно решению (2.12) запишется посредством приравнивания нулю показателя экспоненциального члена в одной точке $x = -2L$.

$$C_{image}(x, t) = \frac{m}{A_{yz} \sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-(x + 2L)^2 / 4Dt\right) \quad (2.37)$$

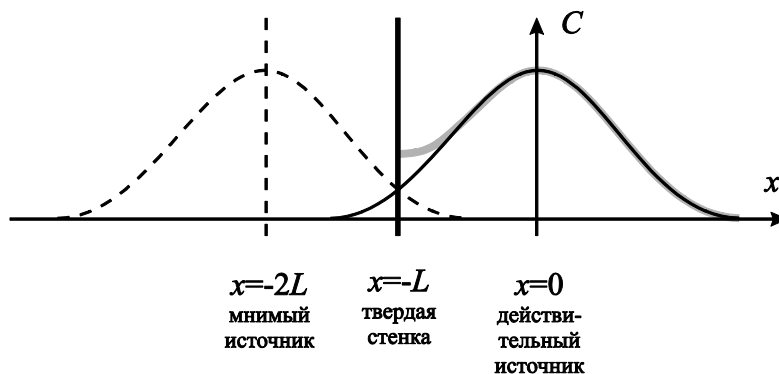


Рис. 2.12. Сумма распределений концентраций от реального и мнимого источников с нулевым потоком на твердой границе

Совмещение (сумма) распределений от оригинала и образа источника показано в области течения ($x > -L$) в виде густой серой линии. Новая кривая удовлетворяет условию (2.36). Таким образом, требуемое решение может быть записано как

$$C(x, t) = C + C_{image} = \frac{m}{A_{yz} \sqrt{4\pi Dt}} \left(\exp(-x^2 / 4Dt) + \exp(-(x + 2L)^2 / 4Dt) \right) \quad (2.38)$$

Решение (2.38) реализовано в программе P2.5. Распределения $c(x, t)$ для граничного условия (2.36) при $x = -2$ в различные моменты времени для $D = 1$ и с различными коэффициентами диффузии для $t = 0.5$ приведены на рис.2.13, рис.2.14.

ListingP2.5: Программа визуализации решения одномерного уравнения диффузии в неподвижной среде (2.38)

```
dif:1$
l:2;
c(x,t,dif):=1/sqrt(4*%pi*dif*t)*(exp(-x^2/(4*dif*t))+exp(-(x+2*l)^2/(4*dif*t)))$
wxplot2d([c(x,0.1,1),c(x,0.2,1),c(x,0.5,1),c(x,1,1)], [x,-1,5],
[legend,"t=0.1","t=0.2","t=0.5","t=1"], [style,[lines,4,5],[lines,3,5],
[lines,2,5],[lines,1,5]], [ylabel,"c(x,t)"], [xlabel,"x"]);
wxplot2d([c(x,0.5,0.1),c(x,0.5,0.2),c(x,0.5,0.5),c(x,0.5,1)], [x,-1,4],
[legend,"dif=0.1","dif=0.2","dif=0.5","dif=1"], [style,[lines,4,5],[lines,3,5],
[lines,2,5],[lines,1,5]], [ylabel,"c(x,t)"], [xlabel,"x"]);
```

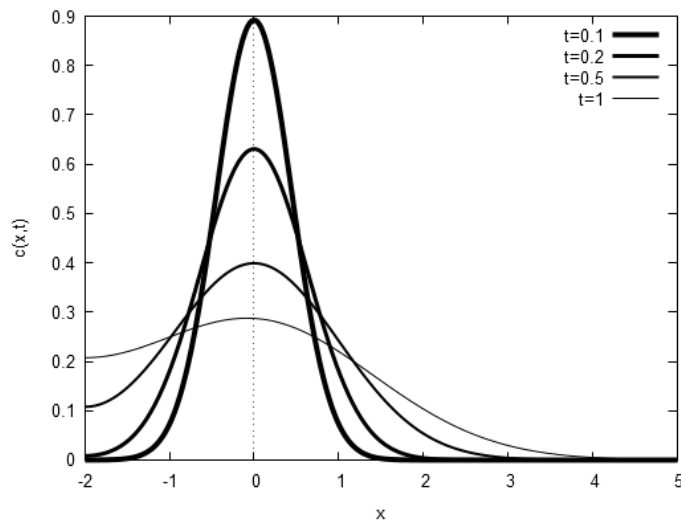


Рис. 2.13. Распределение $c(x,t)$ для граничного условия (2.36) при $x=-2$ в различные моменты времени

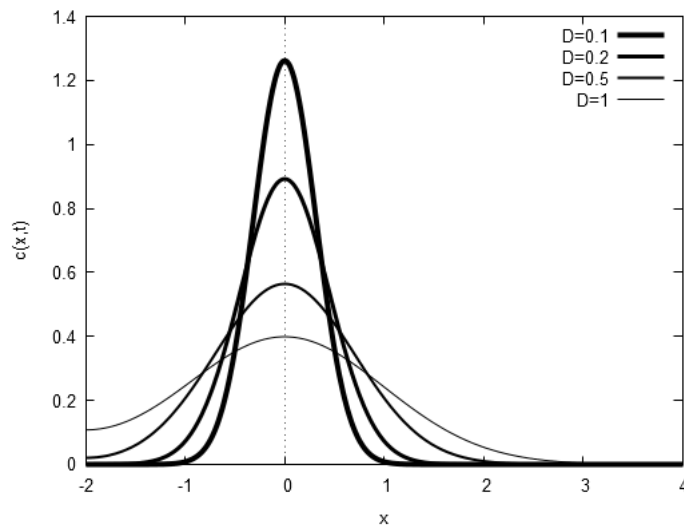


Рис. 2.14. Распределение $c(x,t)$ для граничного условия (2.36) при $x=-2$ с различными D

Изложенный выше метод суперпозиции может быть применен и для случая идеально поглощающей границы. Рассмотрим описанную выше одномерную задачу с действующей как идеальный поглотитель границей в точке $x = -L$ (рис.2.15). Тогда мы ищем решение задачи (2.1) с начальным условием (2.2) и граничным условием

$$C(x = -L, t) = 0 \quad (2.39)$$

Для удовлетворения граничного условия (2.39) теперь вместо того, чтобы добавить образ источника, вычтем его:

$$C(x,t) = C - C_{image} = \frac{m}{A_{yz}\sqrt{4\pi Dt}} \left(\exp(-x^2 / 4Dt) - \exp(-(x+2L)^2 / 4Dt) \right) \quad (2.40)$$

Схематически распределения концентрации от исходного и мнимого источников и их сумма приведены на рис. 2.15. Наложенное решение (густая серая линия) указывает на поток при $x = -L$, т.е. $\partial C / \partial x > 0$, что согласуется с условием поглощающей границы. Также отметим, что решение (2.40) дает отрицательную концентрацию для области $x < -L$, что является физически невозможным. Т.к. эта область находится за пределами реального потока ($x > -L$), рассчитанные по (2.40) величины концентрации не имеют значения.

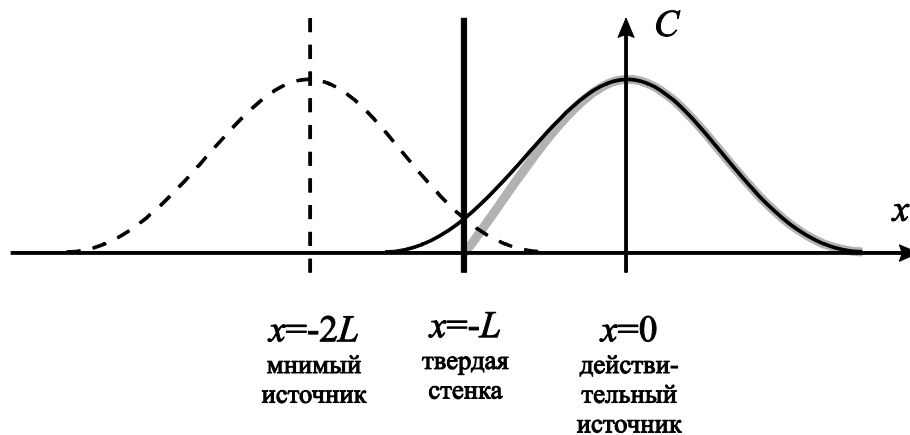


Рис. 2.15. Сумма распределений концентраций от реального и мнимого источников с нулевой концентрацией на твердой границе

Решение (2.40) реализовано в программе **P2.6**. Распределения $c(x,t)$ для граничного условия (2.39) при $x = -2$ в различные моменты времени для $D=1$ и с различными коэффициентами диффузии для $t=0.5$ приведены на рис.2.16, рис.2.17.

ListingP2.6: Программа визуализации решения одномерного уравнения диффузии в неподвижной среде с граничными условиями (2.40)

```
dif:1$
1:2$
```

```

c(x,t,dif):=1/sqrt(4*%pi*dif*t)*(exp(-x^2/(4*dif*t))-
exp(-(x+2*1)^2/(4*dif*t)))$
wxplot2d([c(x,0.1,1),c(x,0.2,1),c(x,0.5,1),c(x,1,1)],[x,-1,5],
[legend,"t=0.1","t=0.2","t=0.5","t=1"],[style,[lines,4,5],[lines,3,5],
[lines,2,5],[lines,1,5]],[ylabel,"c(t)],[xlabel,"x"]);
wxplot2d([c(x,0.5,0.1),c(x,0.5,0.2),c(x,0.5,0.5),c(x,0.5,1)],[x,-1,4],
[legend,"dif=0.1","dif=0.2","dif=0.5","dif=1"],
[style,[lines,4,5],[lines,3,5],[lines,2,5],[lines,1,5]],
[ylabel,"c(x,t)],[xlabel,"x"]);

```

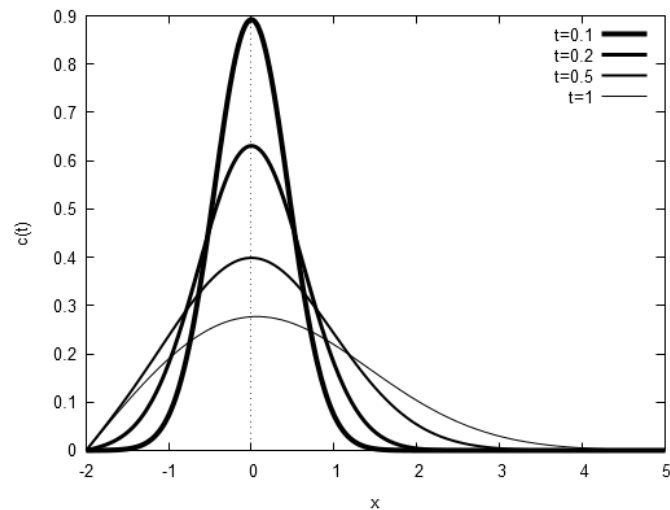


Рис. 2.16. Распределение $c(x,t)$ для граничного условия (2.39) при $x=-2$ в различные моменты времени

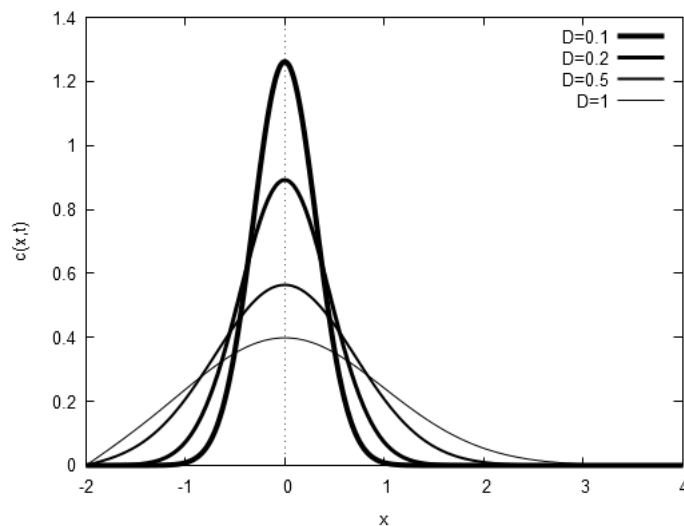


Рис. 2.17. Распределение $c(x,t)$ для граничного условия (2.39) при $x=-2$ с различными коэффициентами диффузии

В случае, когда область распространения загрязнений ограничена с двух сторон при $x=-L$ и $x=L$, уравнение (2.1) дополняется начальным условием (2.2) и граничными условиями

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \text{ при } x = -L \text{ и } x = L \quad (2.41)$$

Для удовлетворения условий отсутствия потока загрязнений при $x=-L$, добавим мнимый источник при $x=-2L$, как это было сделано в предыдущей задаче. Для удовлетворения условий отсутствия потока загрязнений при $x=L$ следует добавить мнимый источник при $x=2L$. Оба новых мнимых источника изображены на рис. 2.18.

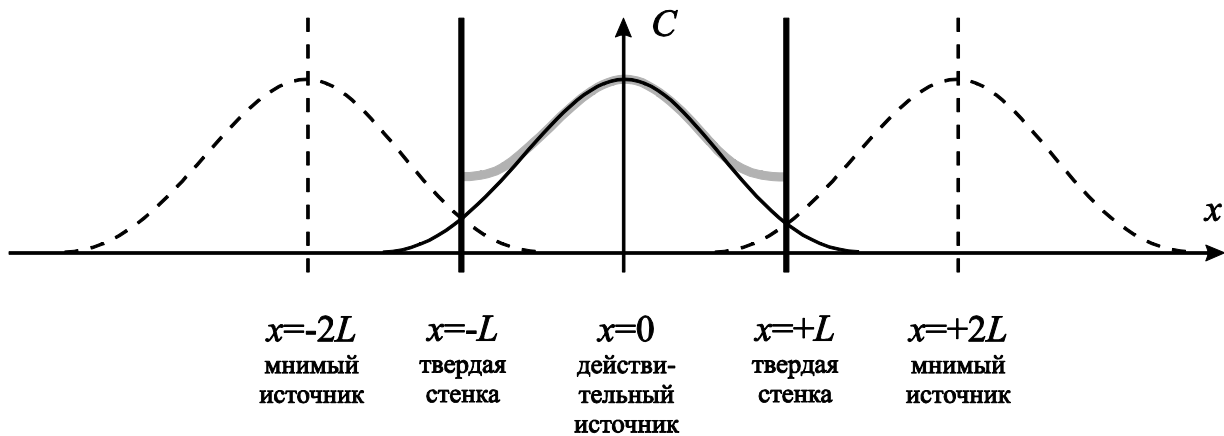


Рис. 2.18. Сумма распределений концентраций от реального и мнимых источников с нулевым потоком на двух твердых границах

На рис. 2.18 схематически показаны распределения концентрации загрязнений за малое начальное время. С увеличением времени распространения загрязнение от мнимого источника $x=-2L$ достигнет противоположной границы $x = L$, и часть общей массы будет покидать реальную область $-L < x < L$. . Чтобы компенсировать эти потери, необходимо добавить новый мнимый источник при $x=4L$ на расстоянии $3L$ от правой границы рассматриваемой области $x=L$. Кроме того, мнимый образ источника в точке $x=2L$ требует добавочного источника при $x=-4L$ на расстоянии $3L$ от левой границы рассматриваемой области $x=-L$. Продолжая рассуждения, придем к выводу, что мы должны далее установить бесконечное множество

мнимых источников, как объектов между параллельными зеркалами, порождающих бесконечное количество изображений. Решение описанной задачи, таким образом, может быть представлено формулой

$$C(x,t) = \frac{m}{A_{yz} \sqrt{4\pi Dt}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x+2nL)^2}{4Dt}\right) \right) \quad (2.41)$$

Решение (2.41) реализовано в программе P2.7. Распределения $c(x,t)$ для граничного условия (2.41) при $x = -2$ и $x = 2$ в различные моменты времени для $D=1$ и с различными коэффициентами диффузии для $t=0.5$ приведены на рис.2.19, рис. 2.20.

ListingP2.7: Программа визуализации решения одномерного уравнения диффузии в неподвижной среде с граничными условиями (2.41)

```
dif:1$
l:2$
ns:5$
c(x,t,dif):=1/sqrt(4*%pi*dif*t)*sum(exp(-(x+2*n*l)^2/(4*dif*t)),n,-ns,ns)$
wxplot2d([c(x,0.1,1),c(x,0.2,1),c(x,0.5,1),c(x,1,1)],x,
1,1],[legend,"t=0.1","t=0.2","t=0.5","t=1"],[style,[lines,4,5],[lines,3,5],
[lines,2,5],[lines,1,5]],ylabel,"c(x,t)",xlabel,"x");
wxplot2d([c(x,0.5,0.1),c(x,0.5,0.2),c(x,0.5,0.5),c(x,0.5,1)],x,-1,2),
[legend,"dif=0.1","dif=0.2","dif=0.5","dif=1"],[style,[lines,4,5],[lines,3,5],
[lines,2,5],[lines,1,5]],ylabel,"c(x,t)",xlabel,"x");
```

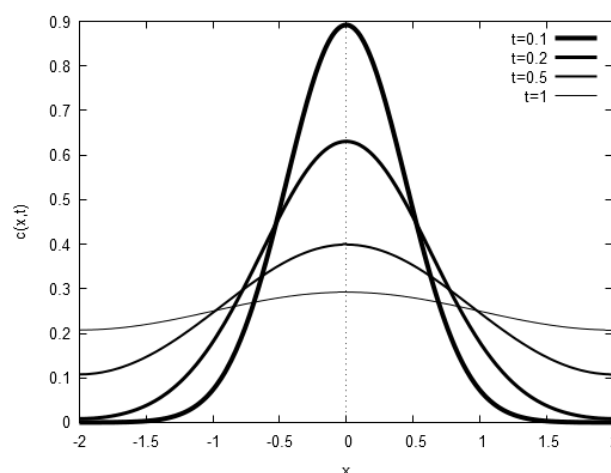


Рис. 2.19. Распределение концентрации в различные моменты времени (две границы с нулевым потоком)

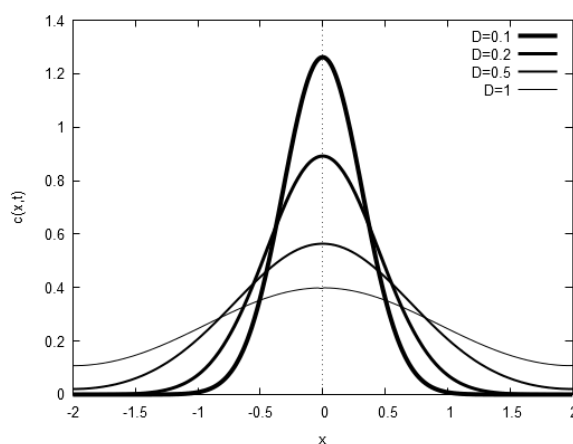


Рис. 2.20. Распределение концентрации при различных коэффициентах диффузии (две границы с нулевым потоком)

Аналогичным образом, в случае если границы в точке $x = \pm L$ представляют собой идеальные поглотители, задача (2.1) дополняется условием

$$C = 0 \text{ при } x = -L \text{ и } x = L \quad (2.42)$$

Простые геометрические рассуждения показывают, что отрицательные и положительные мнимые источники нужны при $x = \pm 2L$ и $x = \pm 4L$, соответственно. С учетом этого новое решение получим в виде

$$C(x,t) = \frac{m}{A_{yz} \sqrt{4\pi Dt}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(-\exp\left(-\frac{(x + (4n-2)L)^2}{4Dt}\right) + \exp\left(-\frac{(x + 4nL)^2}{4Dt}\right) \right). \quad (2.43)$$

Решение (2.43) реализовано в программе P2.8. Распределения $c(x,t)$ для граничного условия (2.42) при $x = -2$ и $x = 2$ в различные моменты времени для $D=1$ и с различными коэффициентами диффузии для $t=0.5$ показаны на рис. 2.19, рис. 2.20.

ListingP2.8: Программа визуализации решения одномерного уравнения диффузии в неподвижной среде с различными граничными условиями(2.43)

```
dif:1$
l:2$
ns:5$
c(x,t,dif):=1/sqrt(4*%pi*dif*t)*sum(-exp(-(x+(4*n-2)*l)^2/(4*dif*t))+
exp(-(x+4*n*l)^2/(4*dif*t)),n,-ns,ns)$
wxplot2d([c(x,0.1,1),c(x,0.2,1),c(x,0.5,1),c(x,1,1)], [x,-1,1],
[legend,"t=0.1","t=0.2","t=0.5","t=1"],[style,[lines,4,5],[lines,3,5],
```

```
[lines,2,5],[lines,1,5],[ylabel,"c(x,t)],[xlabel,"x"]);
wxplot2d([c(x,0.5,0.1),c(x,0.5,0.2),c(x,0.5,0.5),c(x,0.5,1)],[x,-1,4],
[legend,"dif=0.1","dif=0.2","dif=0.5","dif=1"],[style,[lines,4,5],[lines,3,5],
[lines,2,5],[lines,1,5],[ylabel,"c(x,t)],[xlabel,"x"]);
```

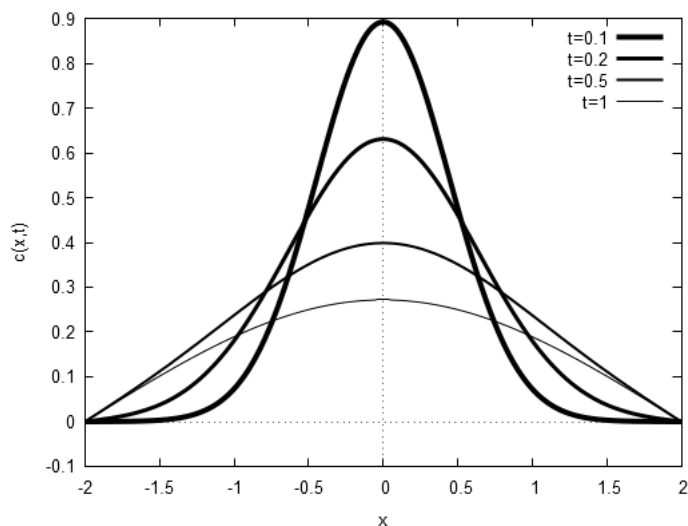


Рис. 2.21. Распределение концентрации в различные моменты времени
(две идеально поглощающие границы)

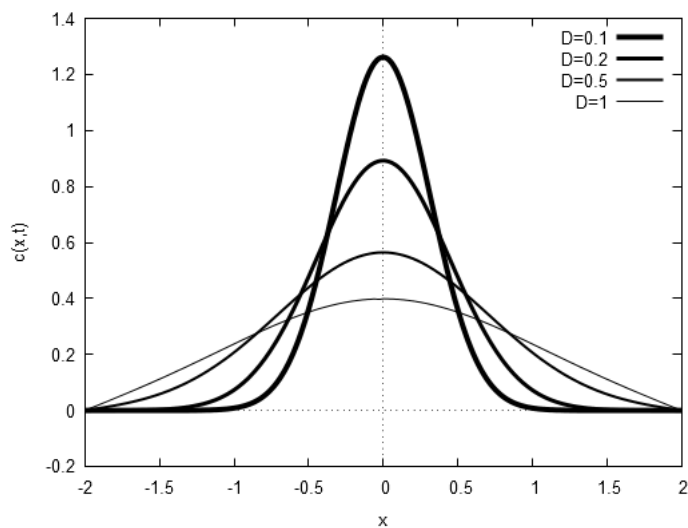


Рис. 2.22. Распределение концентрации при различных коэффициентах
диффузии (две идеально поглощающие границы)

3. ГАУССОВА МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АТМОСФЕРНЫХ ЗАГРЯЗНЕНИЙ

3.1. Гауссова модель распространения загрязнений от точечного источника

Рассмотрим задачу переноса примеси от стационарного точечного источника [3,6]. Пусть выброс загрязняющих веществ в атмосферу осуществляется через трубу высоты h . Примем за начало координат основание трубы. Тогда точечный источник загрязнения атмосферы имеет координаты $(0;0;h)$. Если высота трубы, через которую производится выброс в атмосферу, небольшая, при расчете пространственного распределения концентрации примеси необходимо учитывать эффект отражения распространяющихся в атмосфере взвесей от земной поверхности. Эффект отражения можно учесть, применяя метод виртуального источника загрязнения. Согласно данному методу концентрация в некоторой точке определяется суммой двух концентраций, одна из которых получается при рассмотрении реального источника в предположении отсутствия эффекта отражения, а другая – при рассмотрении виртуального источника, расположенного на высоте $(-h)$. В итоге пространственное распределение концентрации загрязняющей примеси $C(x, y, z)$ [мг/м³] от описанного источника для постоянного ветра, направленного вдоль оси x , в рамках гауссовой модели рассеяния может быть представлено формулой[6]:

$$c(x, y, z) = \frac{q}{2\pi\sigma_y\sigma_z u} \exp\left(\frac{-y^2}{\sigma_y^2}\right) \left[\exp\left(\frac{-(z-h)^2}{\sigma_z^2}\right) + \exp\left(\frac{-(z+h)^2}{\sigma_z^2}\right) \right], \quad (3.1)$$

где q [г/с] – мощность источника, h [м] – высота источника, u [м/с] – средняя скорость ветра, ось y – поперечно–горизонтальное направление, ось z направлена вертикально вверх. Величины σ_y, σ_z – горизонтальная и

вертикальная функции рассеяния от источника, показывающие, как меняется ширина гауссовой струи с увеличением расстояния x от источника загрязнения.

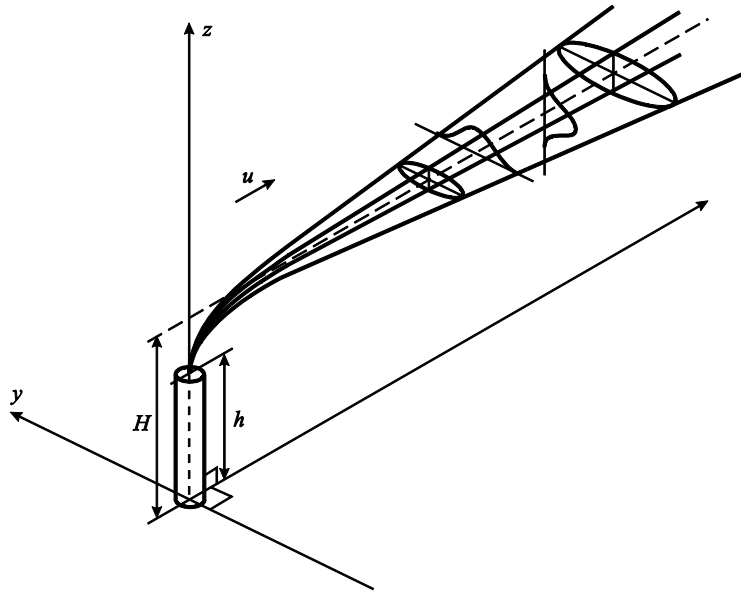


Рис. 6.1. Схема гауссовой струи

Известны гауссовы модели с различными функциями рассеяния σ_y, σ_z : модель Паскуилла–Бриггса, модель Паскуилла–Гиффорда и другие [3,5,6]. В модели Паскуилла–Бриггса значения функций рассеяния задаются в зависимости от класса устойчивости атмосферы (таблица 3.1). Каждому классу устойчивости соответствуют определенные значения скорости ветра u и степени дневной инсоляции и ночной облачности (таблица 3.2).

Приняв для σ_y, σ_z формулы, соответствующие классу устойчивости D для открытой местности и условий городской застройки (табл. 3.1):

$$\sigma_y = 0.08x(1 + 0.0001x)^{-1/2}, \quad \sigma_z = 0.06x(1 + 0.0015x)^{-1/2} \quad (3.2)$$

$$\sigma_y = 0.16x(1 + 0.0004x)^{-0.5}, \quad \sigma_z = 0.14x(1 + 0.0003x)^{-0.5} \quad (3.3)$$

найдем пространственное распределение приземной концентрации загрязняющей примеси согласно модели (3.1) для $q=80$ г/с, $u=6$ м/с, $h=30$ м (программа Р3.1). На рис. 3.2 – 3.4 приведены изолинии приземной концентрации $c(x,y,0)$ и распределение концентрации загрязняющей примеси $c(x,0,0)$ вдоль ветра на оси симметрии. Видно, что различие функций рассеяния для открытой местности и условий городской застройки дает

различные картины распределения концентрации. Во втором случае максимум концентрации достигается ближе к источнику в связи с влиянием значительной шероховатости поверхности земли в условиях городской застройки.

Таблица 3.1

Формулы для σ_y, σ_z , рекомендованные Бриггсом для расстояний от 100 до 10000 м в условиях города и открытой местности

Класс устойчивости атмосферы Паскуилла	Состояние устойчивости	σ_y (м)	σ_z (м)
Открытая местность			
A	Сильно неустойчивое (1)	$0.22x(1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.2x$
B	Неустойчивое (2)	$0.16x(1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.12x$
C	Слабо неустойчивое (3)	$0.11x(1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.08x(1 + 0.0002x)^{-1/2}$
D	Равновесное (4)	$0.08x(1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.06x(1 + 0.0015x)^{-1/2}$
E	Слабоустойчивое (5)	$0.06x(1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.03x(1 + 0.0003x)^{-1}$
F	Устойчивое (6)	$0.04x(1 + 0.0001x)^{-1/2}$	$0.016x(1 + 0.0003x)^{-1}$
Городская местность			
A–B	Неустойчивое (1–2)	$0.32x(1 + 0.0004x)^{-1/2}$	$0.24x(1 + 0.001x)$
C	Слабо неустойчивое (3)	$0.22x(1 + 0.0004x)^{-1/2}$	$0.2x$
D	Равновесное (4)	$0.16x(1 + 0.0004x)^{-1/2}$	$0.14x(1 + 0.0003x)^{-1/2}$
E–F	Устойчивое (5–6)	$0.11x(1 + 0.0004x)^{-1/2}$	$0.08x(1 + 0.0015x)^{-1/2}$

Таблица 3.2

Классы устойчивости атмосферы Паскуилла

Скорость ветра на высоте 10 м, м/с	Степень инсоляции днём			Облачность ночью, баллы	
	сильная	умеренная	слабая	10 (общая) или >5 (нижняя)	<4 (нижняя)
<2	A	A–B	B	—	—
2–3	A–B	B	C	E	F
3–5	B	B–C	D	D	E
5–6	C	C–D	D	D	D
>6	C	D	D	D	D

ListingP3.1: Программа расчета распределения концентрации загрязнений по модели (3.1)

```

qq:80$
u:3$
h:30$
/* открытая местность */
sy:0.08*x/sqrt(1+0.0001*x)$
sz:0.06*x/sqrt(1+0.00015*x)$
c(x,y,z):=qq/(2*pi*sz*sy*u)*exp(-y^2/sy^2)*(exp(-(z-h)^2/sz^2)+exp(-(z+h)^2/sz^2))$
wxcontour_plot(c(x,y,0),[x,10,1500],[y,-200,200],[legend,false],
               [gnuplot_preamble, "set cntrparam levels 13"],[grid, 100, 100],
               [xlabel, "x,m"],[ylabel, "y,m"]);
wxplot2d(c(x,0,0),[x,1,1500],[xlabel, "x,m"],[ylabel, "c(x,0,0)"]);
/* городская местность */
sy:0.16*x/sqrt(1+0.0004*x)$
sz:0.14*x/sqrt(1+0.0003*x)$
c(x,y,z):=qq/(2*pi*sz*sy*u)*exp(-y^2/sy^2)*(exp(-(z-h)^2/sz^2)+exp(-(z+h)^2/sz^2))$
wxcontour_plot(c(x,y,0),[x,10,1500],[y,-200,200],[legend,false],
               [gnuplot_preamble, "set cntrparam levels 13"],[grid, 100, 100],

```

```
[xlabel, "x,m"],[ylabel, "y,m"]);  
wxplot2d(c(x,0,0),[x,1,1500],[xlabel, "x,m"],[ylabel, "c(x,0,0)"]);
```

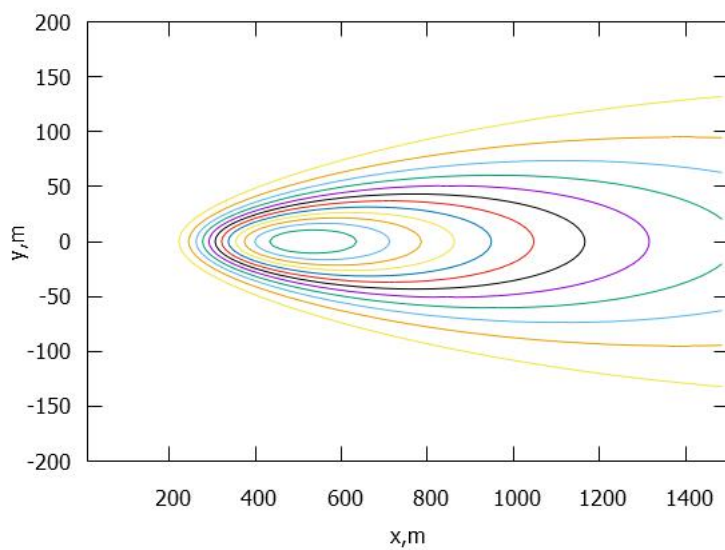


Рис. 3.2. Распределение приземной концентрации загрязняющей примеси
для открытой местности

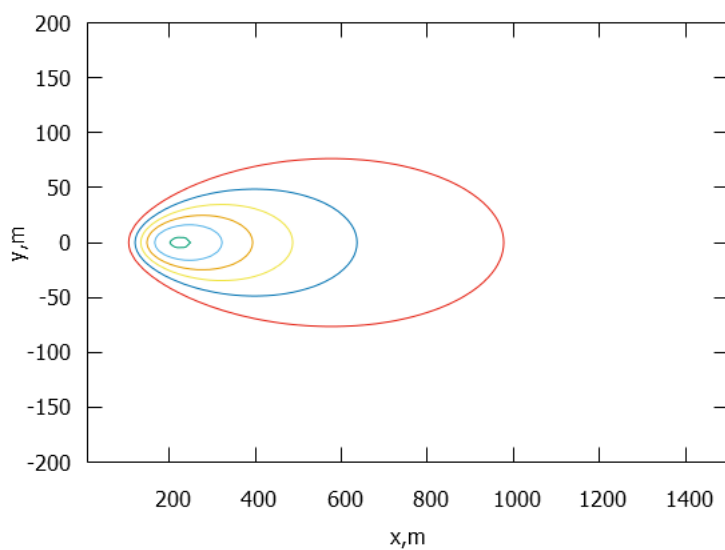


Рис. 3.3. Распределение приземной концентрации загрязняющей примеси
для условий городской застройки

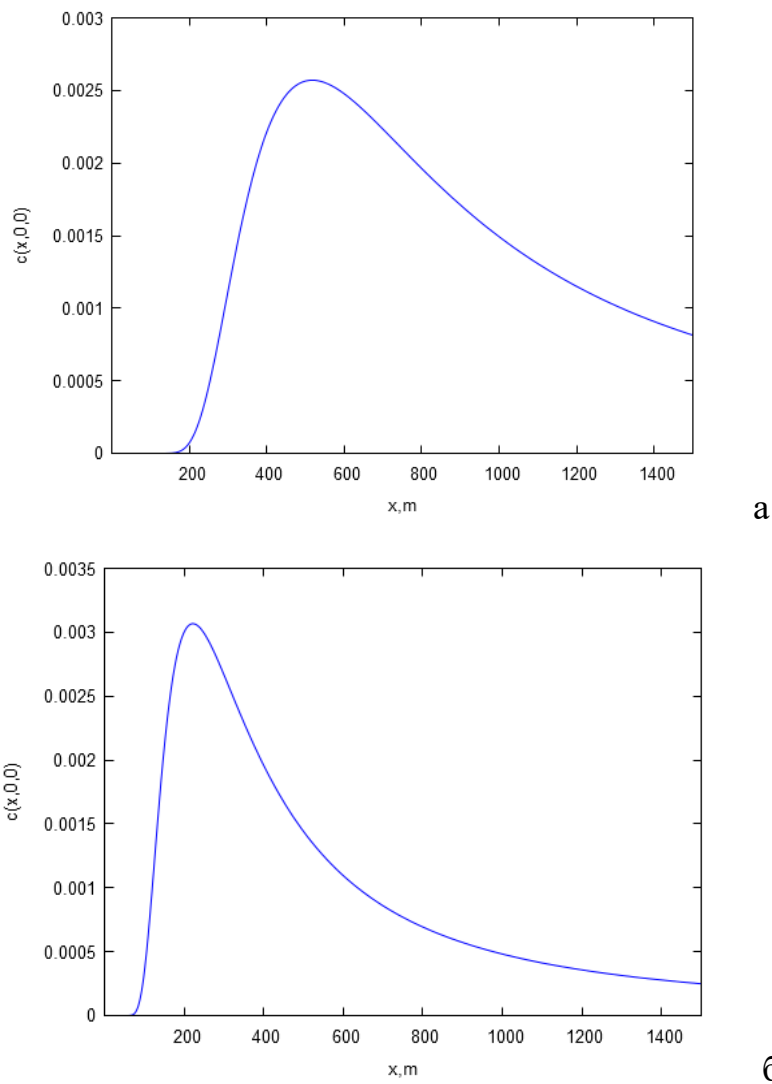


Рис. 3.4. Распределение концентрации загрязняющей примеси $c(x,0,0)$ для открытой местности (а) и условий городской застройки (б)

3.2. Гауссова модель для n источников

Предположим, что вместо одного точечного источника имеется n источников выбросов загрязняющих веществ в атмосферу различной высоты h_i , каждый из которых характеризуется своей мощностью выбросов q_i [г/с] и положением в пространстве $\{x_i, y_i\}$, ($i=1,2,\dots, n$). Формула (3.1) дает распределение концентрации загрязняющей примеси для источника, расположенного в начале координат. Для того чтобы применить данную формулу к источнику, находящемуся в точке $\{x_i, y_i\}$, осуществим параллельный

перенос координат по формулам $x^*=x-x_i$, $y^*=y-y_i$. Тогда суммарная концентрация загрязнения может быть определена как сумма концентраций веществ от отдельных источников и вычислена по формуле

$$c(x, y, z) = \sum_{i=1}^n c(x - x_i, y - y_i, z) = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{2\pi i \sigma_y \sigma_z} e^{-y_i^2 / 2\sigma_{yi}^2} \left(e^{-(z-h_i)^2 / 2\sigma_z^2} + e^{-(z+h_i)^2 / 2\sigma_z^2} \right) \quad (3.3)$$

На рис. 3.5 приведено рассчитанное по формуле (3.3) поле концентрации для случая поступления примесей от трех источников с координатами и высотами (в метрах): $x_1=0, y_1=0, h_1=40$; $x_2=100, y_2=100, h_2=50$; $x_3=250, y_3=-800, h_3=30$ (программа Р3.2). За начало координат принято основание трубы первого источника.

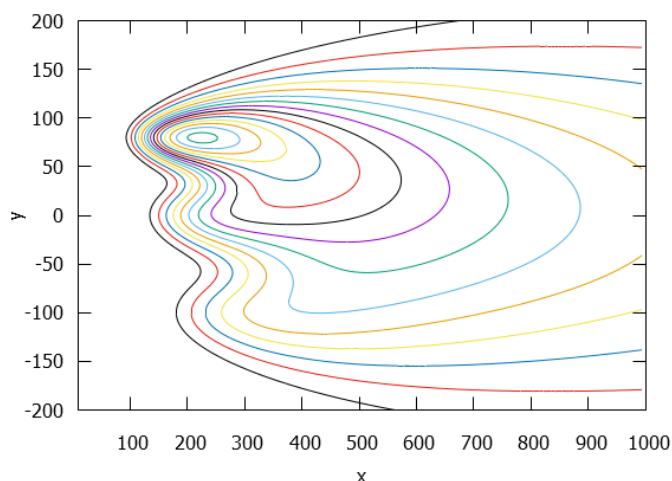


Рис. 3.5. Распределение приземной концентрации загрязняющей примеси от трех точечных источников для условий городской застройки

ListingP3.2: Программа расчета распределения концентрации загрязнений от многих источников по модели (3.3)

```
qq:80$
u:3$
sy:0.16*x/sqrt(1+0.0004*x)$
sz:0.14*x/sqrt(1+0.0003*x)$
c(x,y,z,h):=qq/(2*%pi*sz*sy*u)*exp(-y^2/sy^2)*(exp(-(z-h)^2/sz^2)+exp(-(z+h)^2/sz^2));
```

```
csum(x,y,z):=c(x,y,z,40)+c(x+100,y+100,z,50)+c(x+250,y-80,z,30);
wxcontour_plot(csum(x,y,0),[x,10,1000],[y,-200,200],[legend,false],
[gnuplot_preamble, "set cntrparam levels 40"], [grid, 150, 150]);
```

Задания к разделу

Рассчитать по формуле (3.3) распределение приземной концентрации загрязнений от четырех источников с координатами и высотами (в метрах), приведенными в таблице 3.3.

Таблица 3.3

	$x_i, м$	$y_i, м$	$h_i, м$
1	0	20	30
2	100	0	40
3	30	-50	50
4	120	80	30

4. МОДЕЛЬ ЗАГРЯЗНЕНИЯ РЕКИ

Загрязнение водных систем является одной из важных экологических проблем. Рассмотрим простейшую модель водной системы, включающую в себя растворенные в воде кислород и органические отходы [9]. С течением времени отходы разлагаются под воздействием бактерий при потреблении кислорода. Концентрация отходов $c_p(t)$ [мг/л] определяется биохимической потребностью в кислороде, т.е. количеством кислорода на единицу объема воды, необходимым для разложения отходов. Предполагая, что скорость разложения отходов пропорциональна их концентрации при условии, что в воде присутствует достаточно кислорода для поддержания процесса разложения, можем получить уравнение

$$\frac{dc_p}{dt} = -k_1 c_p \quad (4.1)$$

где k_1 [1/день] – коэффициент потребления кислорода. Решение уравнения (4.1) с начальным условием $c_p(0) = c_{p0}$ запишется в виде

$$c_p = c_{p0} e^{-k_1 t} \quad (4.2)$$

Введем величины c_0 и $c(t)$ как равновесную концентрацию кислорода в воде в отсутствие отходов и фактическую концентрацию кислорода с учетом его расходования на разложение загрязнений. Наряду с потреблением кислорода в загрязненной водной системе есть механизм его увеличения за счет поглощения кислорода из атмосферы водной поверхностью, называемый реаэрацией.

Учитывая два описанных процесса, влияющих на количество кислорода, запишем уравнение для разности концентраций (дефицит кислорода)

$$d_{o_2} = c_0 - c$$

$$\frac{dd_{o_2}}{dt} = k_1 c_p - k_2 d_{o_2} \quad (4.3)$$

где k_2 [1/день] – коэффициент реаэрации. В начальный момент времени $d_{o_2}(0) = d_0$. Уравнение (4.3) может быть решено аналитически

$$d_{o_2}(t) = \frac{k_1 c_{p0}}{k_2 - k_1} (e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}) + d_0 e^{-k_2 t} \quad (4.4)$$

Зависимости величин c_p и d_{o_2} от времени для $k_1 = 0.25$, $k_2 = 0.4$, $c_{p0} = 100$ мг/л $d_0 = 20$ мг/л приведены на рис. 4.1 (программа Р4.1). По мере разложения отходов их концентрация падает, в то время как дефицит кислорода растет до некоторого значения в связи с его расходованием. После достижения своего максимума величина d_{o_2} падает из-за уменьшения начальной концентрации загрязнения.

Решения (4.2) и (4.4) дают зависимость величин c_p и d от времени. Считая в первом приближении, что скорость реки постоянна, заменим время в (4.2) и (4.4) отношением расстояния к скорости течения реки по формуле $t = x/u$.

Зависимости $c_p(x)$ и $d_{o_2}(x)$, полученные для тех же значений параметров, что и на рис. 4.1, приведены на рис. 4.2 (программа P4.2). Видно, что максимум дефицита кислорода достигается на расстоянии около десяти километров от точки выброса.

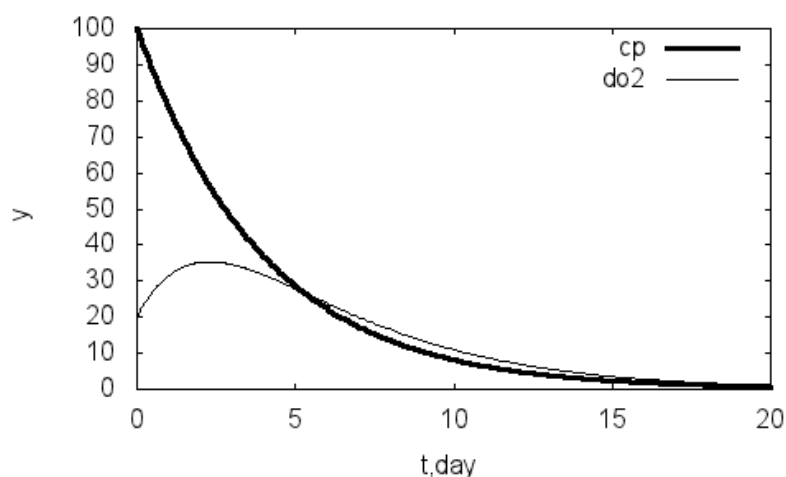


Рис. 4.1. Зависимости величин c_p и d от времени

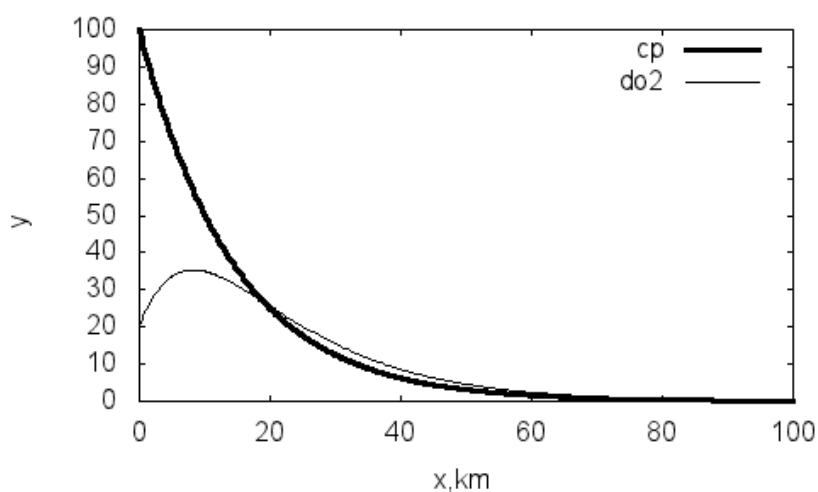


Рис. 4.2. Зависимости величин c_p и d от расстояния до точки выброса

ListingP4.1: Программа расчета концентрации загрязнений реки

```
k1:0.25$
k2:0.4$
cp0:100$
d0:20$
cpt:cp0*exp(-k1*t);
dt:k1*cp0/(k2-k1)*(exp(-k1*t)-exp(-k2*t))+d0*exp(-k2*t);
```

```
wxplot2d([cpt,dt],[t,0,20],[style, [lines,3,5], [lines,1,5]],
[legend, "cp", "d02"],[xlabel,"t,day"], [ylabel,"y"]);
```

ListingP4.2: Программа расчета концентрации загрязнений реки

```
us:0.001$
uday:us*3600$
k1:0.25$
k2:0.4$
cp0:100$
d0:20$
cpt:cp0*exp(-k1*x/uday);
dt:k1*cp0/(k2-k1)*(exp(-k1*x/uday)-exp(-k2*x/uday))+d0*exp(-k2*x/uday);
wxplot2d([cpt,dt],[x,0,100],[legend, "cp", "d"],[xlabel,"x,km"], [ylabel,"y"],
[style, [lines,3,5],[lines,1,5]]);
```

Задания к разделу

Решить задачу Коши для уравнений (4.1) и (4.3) численно с помощью процедуры rk (метод Рунге–Кутты) (программа P4.3). Сравнить кривые $c_p(t)$ и $d_{o_2}(t)$, полученные численно и из формул (4.2) и (4.4).

ListingP4.3: Программа расчета концентрации загрязнений реки

```
load("dynamics");
k1:0.25$
k2:0.4$
cp0:100$
d0:20$
sol:rk([-k1*cp,k1*cp-k2*d],[cp,d],[cp0,d0],[t,0,20,0.1])$
len:length(sol)$
tt:makelist(sol[k][1],k,1,len)$
y1:makelist(sol[k][2],k,1,len)$
y2:makelist(sol[k][3],k,1,len)$
wxplot2d([[discrete,tt,y1],[discrete,tt,y2]],[style, [lines,3,5], [lines,1,5]],
[legend, "cp", "d02"],[xlabel,"t"], [ylabel,"cp,d"]);
```

Список литературы

1. Heidi Nepf. 1.061 Transport Processes in the Environment. Fall 2008. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, <https://ocw.mit.edu>. License: Creative Commons BY–NC–SA.
2. Берков Н. Математический практикум с применением пакета Maxima: Учебное пособие. М.: РИЦ МГИУ, 2008, 89 с.
3. Берлянд М.Е. Прогноз и регулирование загрязнений атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1985, 272 с.
4. Брук В.В., Берешко И.Н. Математические модели в экологии. ч.2. Учебное пособие.– Харьков: Нац. аэрокосм. ун–т, 2006.–68 с.
5. Бызова Н.Л., Гаргер Е.К., Иванов В.Н. Экспериментальные исследования атмосферной диффузии и расчеты рассеивания примеси. Л.: Гидрометеиздат, 1991, 275 с.
6. Замай С.С., Якубайлик О.Э. Модели оценки и прогноза загрязнения атмосферы промышленными выбросами в информационно–аналитической системе природоохранных служб крупного города: Учеб. пособие. Красноярск: Краснояр. гос. ун–т., 1998, 109 с.
7. Зарипов Ш.Х., Абзалилов Д.Ф., Костерина Е.А. Задачи математической экологии и пакет Maxima: учебное пособие/ – Казань: Изд–во Казанского федерального университета, 2015. – 120 с.
8. Стахин Н. Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima: Учебное пособие– [Электронный ресурс], 2008, 86 с.
9. Страшкраба М., Гнаук А. Пресноводные экосистемы. Математическое моделирование. М.: Мир, 1989.

Приложения

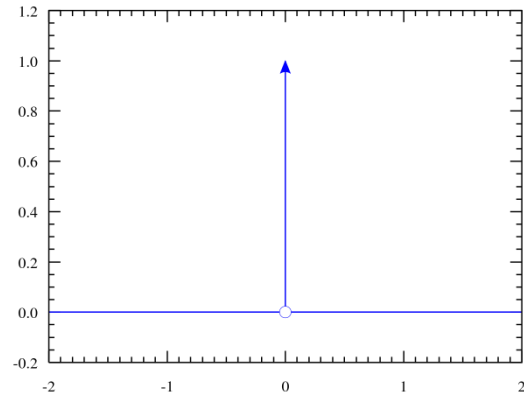
А1. Дельта функция Дирака

Определение 1: Дельта-функция

Дирака $\delta(x)$ является обобщенной функцией, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$



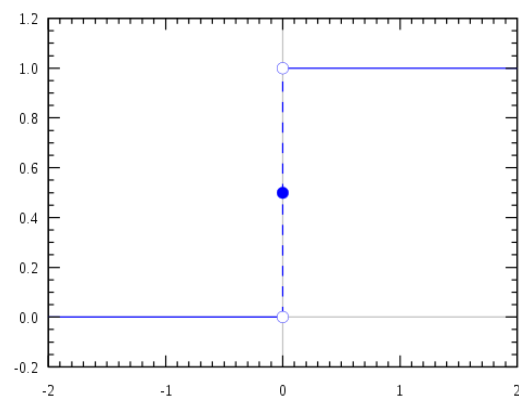
Из этого определения вытекает следующее равенство, которое называют фильтрующим свойством дельта-функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - y) f(x) dx = f(y). \quad (\text{A.1})$$

Эта функция позволяет записать пространственную плотность физической величины, которая сосредоточена в одной точке. Например, плотность одномерной частицы массы, расположенной в точке $x=a$, записывается как $m\delta(x - a)$.

Первообразной дельта-функции является функция Хевисайда

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$



А2.Нормальное распределение (Гауссова функция).

Нормальным называется такое распределение случайных величин, плотность вероятности которого описывается функцией Гаусса:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

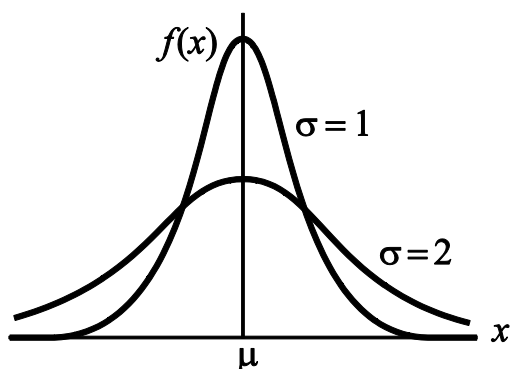
где μ – математическое ожидание (среднее значение), σ – среднее квадратичное отклонение (σ^2 – дисперсия). График плотности нормального распределения называют **нормальной кривой Гаусса**.

Свойства функции Гаусса.

1. Очевидно, что функция определена на всей осей.
2. При всех значениях x функция принимает положительные значения, т.е. нормальная кривая расположена над осью Ox .
3. Ось Ox служит горизонтальной асимптотой графика, поскольку $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$
4. При $x = \mu$ функция имеет максимум, равный

$$f(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

5. Функция четная: ее график симметричен относительно прямой $x = \mu$.



6. При $x = \mu \pm \sigma$ график функции имеет точки перегиба.
7. Изменение величины математического ожидания, т.е. параметра μ , ведет к сдвигу кривой вдоль оси Ox без изменения ее формы. График ведет себя

иначе, если изменяется среднее квадратичное отклонение (параметр σ): с возрастанием σ максимальная ордината нормальной кривой убывает, а сама кривая становится более пологой, т.е. сжимается к оси Ox ; при убывании σ нормальная кривая становится более островершинной и растягивается в положительном направлении оси Oy .

8. При любых значениях параметров μ и σ , согласно условию нормировки функции плотности распределения, площадь, ограниченная нормальной кривой и осями, остается равной единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$